УДК 681.513

А. С. КУЦЕНКО, д-р техн. наук,
С. В. КОНОХОВ, аспирант НТУ «ХПИ»

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В ЗАДАЧАХ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В статті розглянуто задачу пошуку інтервалів для коефіцієнтів характеристичного полінома лінійної динамічної системи, яка задана у просторі станів. Запропоновано та обґрунтовано метод пошуку інтервальних коефіцієнтів, який зведено до вирішення задачі нелінійного програмування.

В статье рассмотрена задача поиска интервалов для коэффициентов характеристического полинома линейной динамической системы, которая задана в пространстве состояний. Предложен и обоснован метод поиска интервальных коэффициентов, который сведен к решению задачи нелинейного программирования.

The paper the problem of characteristic polynomial coefficients for linear dynamic system in state space is considered. The method for interval coefficients search is proposed, witch leads to the nonlinear programming problem.

Введение. Классическая теория управления, начинающаяся с работ Дж. Максвелла и И.А. Вышнеградского и заканчивающаяся теорией управления в пространстве состояний Р. Каллмана, а также его последователей, позволили сформулировать и решить широчайший спектр задач управления, прежде всего техническими объектами. Успех теории управления был достигнут благодаря привлечению разнообразных математических методов, а также современных средств вычислительной техники. Несмотря на очевидные успехи в этой области с точки зрения, как теоретических результатов так и их практической реализации у большинства исследователей и инженеров не мог не вызвать чувства неудовлетворенности центральный тезис подавляющего большинства постановок задач управления. Это тезис о наличии полной информации о структуре математической модели объекта управления и ее параметров. Достаточно взглянуть на теорию устойчивости систем автоматического управления, что бы увидеть попытки многих исследователей найти способы гарантировать свойство устойчивости при вариациях параметров объекта управления. Принципиальным подходом к учету параметрической неопределенности объекта управления явился подход, в основу которого положена множественная оценка того или иного качества управляемой системы или робастный подход. Фундаментом нового направления в теории управления следует считать основополагающие работы Фаэдо и Харитонова [1, 2], в которых получены необходимые и достаточные условия гурвицевости полиномов с интервальными коэффициентами, отражающими неопределенность исходной математической модели линейных управляемых систем. Условия робастной устойчивости интервальных полиномов позволили сформулировать множество новых постановок задач теории устойчивости систем управления [3], отличающихся от классических более высокой степенью адекватности по отношению к реальным объектам и процессам. В то же время робастный подход породил и множество проблем, связанных с его практической реализацией. В этом плане центральной остается проблема перехода от исходной линейной математической модели с интервальными параметрами к характеристическому уравнению с интервальными коэффициентами [3]. Поскольку вектор коэффициентов характеристического полинома является вычислимой функцией исходных интервальных параметров модели, то очевидно, что практическое решение сформулированной проблемы следует искать в сфере интервального анализа [4]. В рамках интервального анализа проблема получения интервальных оценок коэффициентов характеристического полинома сводится к задаче выбора соответствующего численного метода, а также вида интервальной арифметики, обеспечивающих оптимальную (минимальную) оценку интервалов для коэффициентов характеристического уравнения.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу нахождения интервалов для коэффициентов характеристического уравнения линейной стационарной динамической системы вида

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

где x – вектор состояния, а каждый элемент матрицы A представляет собой интервальное число $a_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$. Известно, что нахождение вектора $C(A) = (c_1, \dots, c_n)$ коэффициентов характеристического уравнения матрицы A

$$\sigma(A) = p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_n = 0 \tag{2}$$

для $n > 3$, в общем случае, может быть осуществлено только алгоритмически с применением ЭВМ. Известно также [4], что результаты вычислений интервальных функций в зависимости от интервальных аргументов в значительной мере зависят от последовательности вычислений или вида формулы, реализующей заданную функциональную зависимость. Это приводит к тому, что интервалы для вектора $C(A)$, полученные различными численными методами, существенно отличаются друг от друга. Таким образом, целью данной работы является обоснование метода определения минимальных интервалов для коэффициентов характеристического полинома, исходя из интервальной матрицы системы (1) A.

Данная задача может рассматриваться и в более общей постановке когда коэффициенты матрицы A являются известными функциями m-мерного вектора параметров $w \in W$. Предполагается также, что допустимое множество параметров W представляет собой m-мерный параллелепипед. Т.е. каждая из компонент вектора параметров w_k представляет собой интервальное число $w_k = \left(\underline{w}_k, \overline{w}_k\right)$, а вектор коэффициентов C можно рассматривать в качестве функции интервального вектора параметров $C = C(w)$.

Анализ интервальных методов. В основу интервальной арифметики положено следующее определение [4]:

$$A * B = \left\{a * b \middle| a \in A,\ b \in B\right\}, \tag{3}$$

где $A = [\underline{a}, \overline{a}]$, $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ – интервальные числа, $*$ – один из символов арифметических операций.

Нетрудно показать, что для арифметических операций концы результирующего интервала являются функциями концов интервалов A и B:

$$A + B = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}],$$

$$A - B = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}],$$

$$A \times B = [\min\{\underline{a} \times \underline{b}, \underline{a} \times \overline{b}, \overline{a} \times \underline{b}, \overline{a} \times \overline{b}\},\ \max\{\underline{a} \times \underline{b}, \underline{a} \times \overline{b}, \overline{a} \times \underline{b}, \overline{a} \times \overline{b}\}], \tag{4}$$

$$A \div B = [\min\{\underline{a} \div \underline{b}, \underline{a} \div \overline{b}, \overline{a} \div \underline{b}, \overline{a} \div \overline{b}\},\ \max\{\underline{a} \div \underline{b}, \underline{a} \div \overline{b}, \overline{a} \div \underline{b}, \overline{a} \div \overline{b}\}].$$

Непосредственное применение правил (4) для вычислений по алгебраически эквивалентным формулам показывает, что результирующий интервал в общем случае зависит от конкретного вида формулы. Так, например, в общем случае

$$A(B + C) \neq AB + AC. \tag{5}$$

Кроме того, адаптация формул (4) к одноместным операциям приводит к противоречиям с основным определением (3). Действительно, в соответствии с (4),

$$A - A = [\underline{a} - \overline{a}, \overline{a} - \underline{a}] \neq 0, \tag{6}$$

$$A \div A = [\min\{\underline{a} \div \overline{a}, \overline{a} \div \underline{a}\},\ \max\{\underline{a} \div \overline{a}, \overline{a} \div \underline{a}\}] \neq 1.$$

В то же время, прямое применение множественного соотношения (3) к одноместным операциям (6)

$$A * A = \left(a * a \middle| a \in A\right) \tag{7}$$

очевидно, дает понятный результат:

$$A - A = 0, \quad A \div A = 1. \tag{8}$$

Еще более неприятной представляется операция A^2 в случае если A – нульсодержащий интервал. Тогда представление

$$A^2 = A \times A = [\underline{a}, \overline{a}] \times [\underline{a}, \overline{a}],$$

и применение (4), приводит к нульсодержащему интервалу

$$A^2 = [\underline{a} \times \overline{a}, \overline{a} \times \overline{a}]. \tag{9}$$

В то же время, непосредственное применение формулы (7) дает следующий результат

$$A^2 = [0, \overline{a}^2],$$

поскольку квадраты отрицательных значений интервальных чисел положительны.

Перечисленные выше особенности стандартной интервальной арифметики являются причиной неопределенности результата вычислений, а также очевидного расширения результирующего интервала в силу соотношений (5), (6) и (9).

Причиной этого недостатка интервальных методов является переход от алгебраических формул к конкретным вычислениям, путем формальной подстановки численных интервалов вместо буквенных обозначений и непосредственного использования формул (4).

Таким образом, для получения физически обоснованного результата при вычислении сложных алгебраических выражений $Y = F(x_1, x_2, ..., x_n)$, зависящих от интервальных аргументов, необходимо пользоваться расширением соотношения (3) в виде

$$Y = \{F(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1 \in X_1, ..., x_n \in X_n\}. \tag{10}$$

Если функция $F(x_1, ..., x_n)$ непрерывна, то множество Y представляет собой интервал

$$Y = [F_{\min}, F_{\max}], \tag{11}$$

где $F_{\min}$ и $F_{\max}$ минимальное и максимальное значение функции F на гиперпараллелепипеде

$$\Gamma = \{(x_1, ..., x_n) | x_1 \in X_1, ..., x_n \in X_n\}. \tag{12}$$

Итак, вместо прямого применения интервальной арифметики с непрогнозируемыми результатами, задача нахождения интервала сложной функции от интервальных аргументов может быть сведена к классической задаче нелинейного программирования – отыскания минимума и максимума функции на n-мерном гиперпараллелепипеде.

Еще более сложным представляется случай нахождения векторной интервальной функции векторного интервального аргумента, имеющий место при нахождении интервалов для вектора коэффициентов $C(w)$ характеристического уравнения (2). Нетрудно видеть, что распространение выражений (10), (11) на случай вектор-функции $F = (F_1, F_2, ..., F_m)$ приводит к следующему соотношению:

$$Y \subset Y_1 \times Y_2 \times ... \times Y_m = \overline{Y}, \tag{13}$$

где Y_k – интервал вида (11) для k-й компоненты F_k, определенный на множестве (12).

Таким образом, интервальное множество $\overline{Y}$ коэффициентов характеристического уравнения (2), содержит точки, не принадлежащие множеству Y, т.е. с точки зрения устойчивости ансамбля линейных систем, определенного на множестве Γ, теорема Харитонова дает достаточные условия робастной устойчивости.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Полученные результаты дают реальный путь к интервальной оценке коэффициентов характеристического уравнения ансамбля линейных динамических систем, который в общем случае сводится к многократному решению задачи отыскания максимума и минимума многомерной функции на множестве в виде гиперпараллелепипеда. Дальнейшие исследования в этом направлении связаны с непосредственной разработкой эффективных численных алгоритмов отыскания интервалов для коэффициентов характеристического уравнения.

Список литературы: ***1.*** *Faedo S.* Un nuovo problema di stabilita her le equarioni algebrishe a coefficienti reali // Aun Scuolo notm. super. Pisa Sci fis. e mat., 1953. – V.7. – №. 1-2. – P. 53-63. ***2.*** *Харитонов В. Л.* Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения.– 1978.– № 11.– С. 2086–2088. ***3.*** *Кунцевич В. М.* От проблем управления одним объектом – к проблемам управления классами объектов // Проблемы управления и информатики. – 1994. № 1 - 2. – С.3–15. ***4.*** *Шокин Ю. И.* Интервальный анализ.– Новосибирск: Наука, СО, 1981.– 112с.

Поступила в редколлегию 17.11.07